Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift ändrades i början av 2018 från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Tisdagen den 14 januari 2020 klockan 14.00-17.00 på Johanneberg.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15.00 och 16.00.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

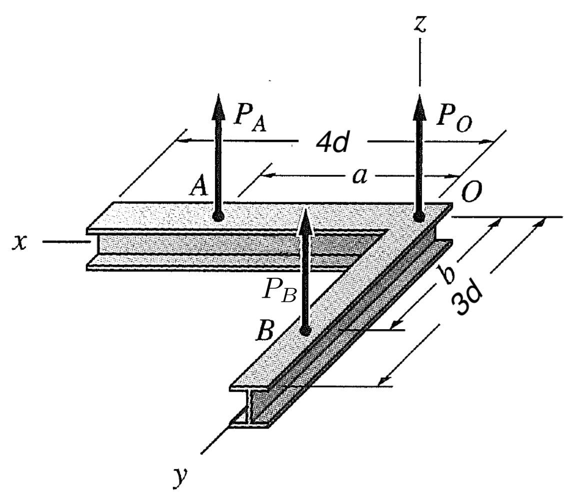
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Fredagen 7 februari, kl 12.30-13.00 i FL61.

Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

1. Den L-formade homogena balken med totala längden $7d$ hålls i jämvikt med tre vertikala kablar, fästa i punkterna A, B och O, och som ger upphov till krafterna P_A, P_B och P_O. Bestäm avstånden a och b så att krafterna i de tre kablarna blir lika stora.

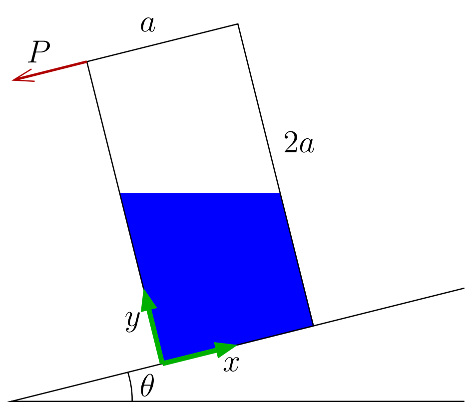


2. En rätblocksformad vattentank med bredden a och höjden $2a$ står på ett lutande plan med statisk friktionskoefficient μ_s. Tanken är fylld till hälften, och vattnets massa är då m. Tankens egna massa kan försummas jämfört med vattnets massa.

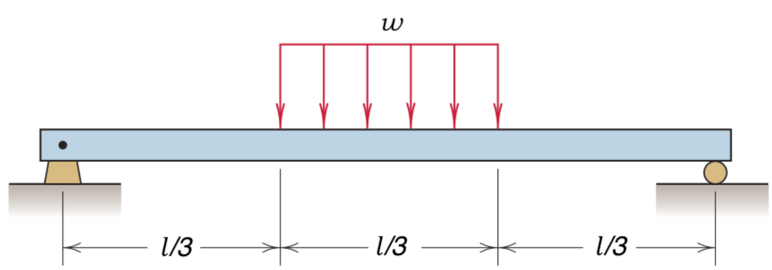
   (a) Hur stor kraft P, parallell med planets lutning, krävs för att tippa tanken?

   (b) Hur stor måste friktionskoefficienten μ_s vara för att tanken *inte ska börja glida* innan den tippar enligt villkoret i a-uppgiften?

   Du får anta att lutningen på planet är så liten att vattnet i tanken inte når upp till tankens tak (vilket är ekvivalent med antagandet att $\tan\theta < 2$).



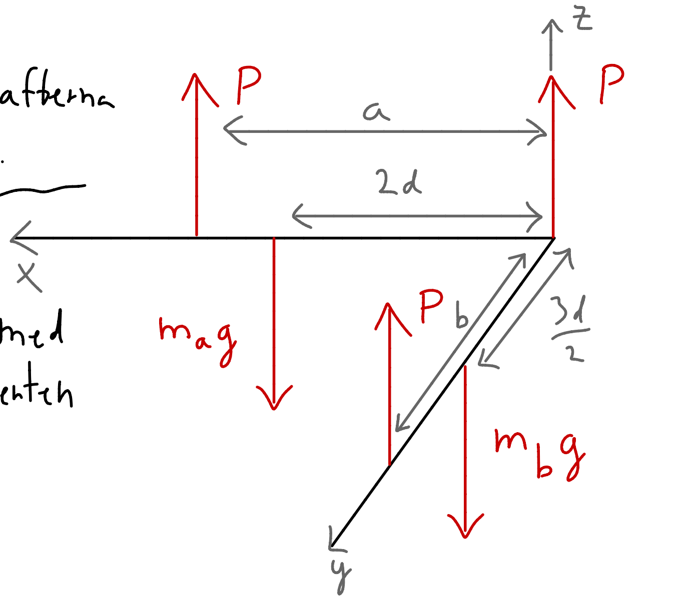
3. Rita diagram över skjuvkraften och böjmomentet för balken med totala längden l och med belastning enligt figuren (w är en distribuerad last med enhet N/m). Bestäm även det maximala böjmomentet och dess läge på balken. Balken antas vara masslös.



Lycka till!

1)

Sökt: Avstånd a, b s.a. krafterna från upphängningen är lika.



I figuren är balken frilagd med tyngdkraften från de två segmenten separerade.

Moment kring O:

$$\vec{M}_o = a\hat{i} \times P\hat{z} + b\hat{j} \times P\hat{k} + 2d\hat{i} \times (-m_a g\hat{z}) + \frac{3d}{2}\hat{j} \times (-m_b g\hat{k})$$
$$= -aP\hat{j} + bP\hat{i} + 2d m_a g\hat{j} - \frac{3d}{2} m_b g\hat{i}$$

Momentjämvikt $\vec{M}_o = 0$ tillsammans med kraftjämvikt i z-led:

$$\begin{array}{ll} M_x & \\ M_y & \\ \uparrow z & \end{array} \begin{cases} bP - \frac{3d}{2} m_b g = 0 & \Rightarrow b = \frac{3d}{2}\frac{m_b g}{P} \quad (1) \\ -aP + 2d m_a g = 0 & \Rightarrow a = 2d\frac{m_a g}{P} \quad (2) \\ 3P - (m_a + m_b) g = 0 & \Rightarrow P = \frac{(m_a + m_b) g}{3} \quad (3) \end{cases}$$

Antag längddensitet ρ för balken, då gäller

$$\begin{cases} m_a = 4d\rho \\ m_b = 3d\rho \end{cases}$$

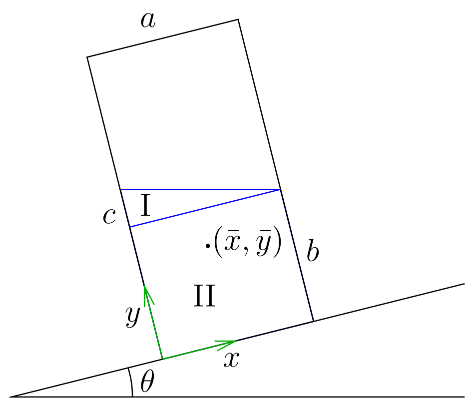
Insättning av (3) i (1) o (2) ger nu

$$a = 2d\frac{4d\rho}{\frac{7}{3}d\rho g} g = \frac{24}{7} d$$

$$b = \frac{3d}{2}\frac{3d\rho}{\frac{7}{3}d\rho g} g = \frac{27}{14} d$$

(enheterna stämmer uppenbart)

2 Lösningsförslag



Först måste vi bestämma vattnets tyngdpunktskoordinater $(\bar{x}, \bar{y})$. Eftersom tanken är rätblocksformad räcker det med att bestämma areatyngdpunkten för de två areorna markerade med I och II:

$$\bar{x} = \frac{A_{\mathrm{I}}\bar{x}_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}}\bar{x}_{\mathrm{II}}}{A} \tag{1}$$

och på samma sätt för $\bar{y}$. Eftersom tanken är halvfull ges den totala arean av $A = \frac{2a}{2} \times a = a^2$.

Givet beteckningarna i figuren ovan, kan vi bestämma de olika segmentens areor:

$$A_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}ac = \left\{c{=}a\tan(\theta)\right\} = \frac{a^2}{2}\tan(\theta) \tag{2}$$

$$A_{\mathrm{II}} = A - A_{\mathrm{I}} = a^2\left[1 - \frac{1}{2}\tan(\theta)\right] \tag{3}$$

Segment II är en enkel rektangel, så dess tyngdpunkt ges av

$$\bar{x}_{\mathrm{II}} = \frac{a}{2}, \qquad \bar{y}_{\mathrm{II}} = \frac{b}{2} = \frac{A_{\mathrm{II}}/a}{2} = \frac{a}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\tan(\theta)\right]. \tag{4}$$

Segment I är istället en rätvinklig triangel, med katetrarna parallella med x- och y-axlarna. För en godtyckligtriangel vet vi att dess tyngdpunkt ligger en tredjedel av höjden från dess bas, $\bar{h} = \frac{h}{3}$. Alltså ges

$$\bar{x}_{\mathrm{I}} = \frac{a}{3} \tag{5}$$

och för $\bar{y}$ behöver vi också ta med att triangelns bas ligger på avståndet b längs med y-axeln, vilket ger

$$\bar{y}_{\mathrm{I}} = b + \frac{c}{3} = a\left[1 - \frac{1}{2}\tan(\theta)\right] + \frac{a}{3}\tan(\theta) = a\left[1 - \frac{1}{6}\tan(\theta)\right] \tag{6}$$

Summerar vi nu de här resultaten enligt (**??**), får vi

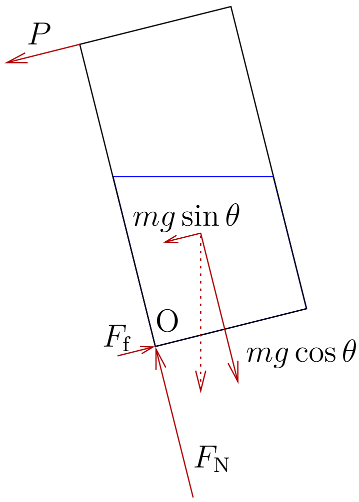
$$\bar{x} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{a^2}{2}\tan(\theta)\times\frac{a}{3} + a^2\left[1-\frac{1}{2}\tan(\theta)\right]\times\frac{a}{2}\right\} = \frac{a}{2}\left[1-\frac{1}{6}\tan(\theta)\right] \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\bar{y} =& \frac{1}{a^2}\left\{\frac{a^2}{2}\tan(\theta)\times a\left[1-\frac{1}{6}\tan(\theta)\right] + a^2\left[1-\frac{1}{2}\tan(\theta)\right]\times\frac{a}{2}\left[1-\frac{1}{2}\tan(\theta)\right]\right\}\\ =& \frac{a}{2}\left[\tan(\theta)-\frac{1}{6}\tan^2(\theta)+1-\tan(\theta)+\frac{1}{4}\tan^2(\theta)\right]\\ =& \frac{a}{2}\left[1+\frac{1}{12}\tan^2(\theta)\right].\end{aligned} \tag{8}$$

Vi kan här göra en rimlighetskontroll:
I fallet $\theta = 0$ förväntar vi oss att $\bar{x} = \bar{y} = a/2$. Insättning i (**??**) ger $\bar{x} = \frac{a}{2}[1-0] = a/2$ och likaså för (**??**) som ger $\bar{y} = \frac{a}{2}[1+0] = a/2$.
ett annat test som vi kan göra är vad som händer då $\tan\theta = 2$, alltså då vattenytan går från hörn till hörn i tanken. Då förväntar vi oss att $\bar{x} = a/3$ och att $\bar{y} = 2a/3$. Insättning i (**??**) ger $\bar{x} = \frac{a}{2}[1-2/6] = a/3$ och för (**??**) som ger $\bar{y} = \frac{a}{2}[1+4/12] = 2a/3$.
Tyngdpunktsformlerna verkar således rimliga.

(a)

Nästa steg är att bestämma tippningsvillkoret. Det fås bäst genom friläggning av tanken:



Här har vi infört dragkraften P, tyngdkraftens x- och y-komponenter samt normal- och friktionskraft.

Notera att precis vid tippning kommer normalkraftens verkningslinje att hamna i origo (nedre hörnet) som betecknas med O. Momentjämvikt kring origo (med positiv riktning motsols) ger nu

$$M_{\mathrm{O}} = 2aP + \bar{y}mg\sin\theta - \bar{x}mg\cos\theta = 0. \tag{9}$$

Med andra ord

$$\begin{aligned}
2a\frac{P}{mg} =& \bar{x}\cos\theta - \bar{y}\sin\theta \\
=& \frac{a}{2}\left\{\left[1 - \frac{1}{6}\tan(\theta)\right]\cos(\theta) - \left[1 + \frac{1}{12}\tan^2(\theta)\right]\sin(\theta)\right\} \\
=& \frac{a}{2}\cos(\theta)\left\{1 - \frac{1}{6}\tan(\theta) - \tan(\theta)\left[1 + \frac{1}{12}\tan^2(\theta)\right]\right\} \\
=& \frac{a}{2}\cos(\theta)\left\{1 - \frac{7}{6}\tan(\theta) - \frac{1}{12}\tan^3(\theta)\right\},
\end{aligned} \tag{10}$$

eller förenklat uttryckt så ges tippningsvillkoret av att

$$P > \frac{mg}{4}\cos(\theta)\left[1 - \frac{7}{6}\tan(\theta) - \frac{1}{12}\tan^3(\theta)\right]. \tag{11}$$

Det är ”större än” för att P ska orka tippa tanken.

Vi kan igen göra en rimlighetskontroll:
Då $\theta = 0$ behöver momentet från P bara övervinna tyngdkraftens moment: $2aP > \frac{a}{2}mg$, eller $P > mg/4$, vilket är samma som vi får vid insättning av $\theta = 0$ i (**??**).

Notera att när θ ökar, så kan högerledet i (**??**) bli negativt. Övergången när detta sker är då uttrycket i hakparentesen blir noll: $1 - \frac{7}{6}\tan(\theta) - \frac{1}{12}\tan^3(\theta) = 0$, vilket är en tredjegradsekvation som ni inte förväntas lösa. Som kuriosa så kan sägas att den reella roten till tredjegradspolynomet ges av $\tan(\theta) \approx 1{,}076$, motsvarande $\theta \approx 47°$. Detta motsvarar vinkeln då tanken tippar av sig själv ($P \le 0$ betyder att tanken tippar utan att man behöver tillföra någon ytterligare kraft).

(a), alternativ lösning

Notera att det också hade varit möjligt att bestämma tippningsvillkoret utifrån att säga att resultantkraften $\vec{R}$ av $\vec{P} = -P\hat{\boldsymbol{\imath}}$ och tyngdkraften $mg[-\sin(\theta)\hat{\boldsymbol{\imath}} - \cos(\theta)\hat{\boldsymbol{\jmath}}]$ ska korsa den nedersta stödpunkten (alltså hörnet i origo).

Vi sa att villkoret för tippning var att $\vec{R}$:s verkanslinje går genom origo. Det är ekvivalent med att säga att momentet kring origo från $\vec{R}$ är noll:

$$\begin{aligned}
\vec{0} = \vec{M}_O^{(\vec{R})} =& 2a\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times (-P\hat{\boldsymbol{\imath}}) + \bar{y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times [-mg\sin(\theta)\hat{\boldsymbol{\imath}}] + \bar{x}\hat{\boldsymbol{\imath}} \times [-mg\cos(\theta)\hat{\boldsymbol{\jmath}}] \\
=& [2aP + \bar{y}mg\sin(\theta) - \bar{x}mg\cos(\theta)]\hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned} \tag{12}$$

Detta är ekvivalent med (**??**), så svaret blir återigen som i (**??**).

(b)

För att bestämma den undre gränsen på friktionskoefficienten, behöver vi använda kraftjämvikt:

$$\begin{cases} F_\mathrm{f} - mg\sin(\theta) - P = 0, & \text{i } x\text{-led}, \\ F_\mathrm{N} - mg\cos(\theta) = 0, & \text{i } y\text{-led}, \end{cases} \tag{13}$$

vilket är samma som

$$\begin{cases} F_\mathrm{f} = mg\sin(\theta) + P, \\ F_\mathrm{N} = mg\cos(\theta). \end{cases} \tag{14}$$

För att lådan inte ska börja glida krävs att $F_\mathrm{f} \leq \mu_\mathrm{s} F_\mathrm{N}$. Med andra ord

$$\mu_\mathrm{s} \geq \frac{F_\mathrm{f}}{F_\mathrm{N}} = \frac{mg\sin(\theta) + P}{mg\cos(\theta)}. \tag{15}$$

Om vi nu sätter in villkoret för tippning (**??**) i villkoret för att inte glida (**??**), får vi

$$\begin{aligned} \mu_\mathrm{s} \geq & \frac{mg\sin(\theta) + P}{mg\cos(\theta)} \\ > & \frac{mg\sin(\theta)}{mg\cos(\theta)} + \frac{mg}{4mg\cos(\theta)}\cos(\theta)\left[1 - \frac{7}{6}\tan(\theta) - \frac{1}{12}\tan^3(\theta)\right] \\ = & \tan(\theta) + \frac{1}{4}\left[1 - \frac{7}{6}\tan(\theta) - \frac{1}{12}\tan^3(\theta)\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Om vi förenklar uttrycket något så får vi villkoret på friktionskoefficienten

$$\mu_\mathrm{s} > \frac{1}{4} + \frac{17}{24}\tan(\theta) - \frac{1}{48}\tan^3(\theta). \tag{17}$$

Notera att detta från början förutsatte att $\tan(\theta) \leq 2$, vi riskerar därför *inte* att få negativa värden på högerledet från den negativa kub-termen.

Svar:

För att tanken ska välta när den dras i toppen, måste den dras med en kraft P som är minst

$$P > \frac{mg}{4}\cos(\theta)\left[1 - \frac{7}{6}\tan(\theta) - \frac{1}{12}\tan^3(\theta)\right]$$

och friktionskoefficienten mellan tanken och underlaget måste vara minst

$$\mu_\mathrm{s} > \frac{1}{4} + \frac{17}{24}\tan(\theta) - \frac{1}{48}\tan^3(\theta).$$

Detta gäller för vinkar (mellan 0 och $\pi/2$) som uppfyller: $0 \leq \tan(\theta) \leq 2$.

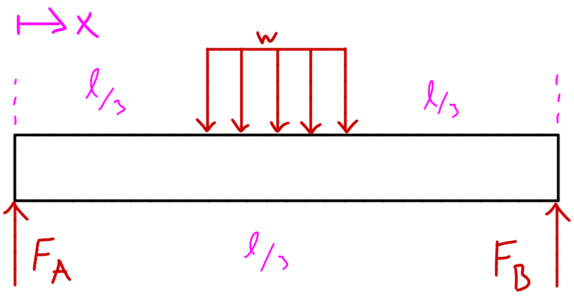
3 Sökt: Diagram över skuvkraft och böjmoment samt maximala böjmomentet och dess position.
Givet: Längden l, lasten w.

Plan: Lösa för externa krafterna först, sedan analys av interna krafter genom friläggning av delar av balken.

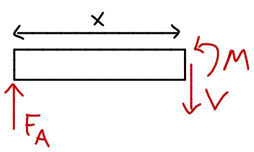
$$\circlearrowleft A: \quad \ell F_B - \frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{3}\cdot w = 0$$

$$\circlearrowleft B: \quad \frac{\ell}{2}\frac{\ell}{3}\cdot w - \ell F_A = 0$$

$$\Rightarrow F_A = F_B = \frac{\ell w}{6}$$

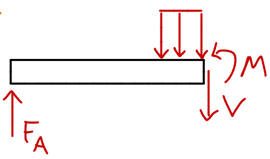


$x < \frac{\ell}{3}$



$$\begin{cases} \uparrow \; F_A - V = 0 \Rightarrow V = F_A = \frac{\ell w}{6} \\ \circlearrowleft A \; M - xV = 0 \Rightarrow M = x F_A = x\frac{\ell w}{6} \end{cases}$$

$\frac{\ell}{3} < x < \frac{2\ell}{3}$



$$\begin{cases} \uparrow: \; F_A - V - w(x - \ell/3) = 0 \\ \circlearrowleft x: \; -F_A x + M + \frac{w}{2}(x - \ell/3)^2 = 0 \end{cases}$$

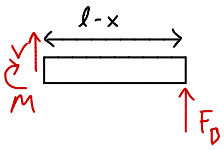
$$\uparrow \Rightarrow V = F_A - w(x - \ell/3) = w(\ell/2 - x)$$

$$\circlearrowleft \Rightarrow M = \frac{w\ell}{6}x - \frac{w}{2}(x - \ell/3)^2$$

$[V] = \underbrace{m}_{\ell} \cdot \underbrace{\frac{[kraft]}{m}}_{w} = [kraft]$

$[M] = m \cdot m \cdot \frac{[kraft]}{m}$
$= m \cdot [kraft]$
$= [vridmoment]$

$x > \frac{2\ell}{3}$



$$\begin{cases} \uparrow \; V + F_B = 0 \Rightarrow V = -\frac{w\ell}{6} \\ \circlearrowleft B \; -M - (\ell - x)V = 0 \Rightarrow M = (\ell - x)\frac{w\ell}{6} \end{cases}$$

$$M' = 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{\ell}{2}$$

$$M\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{w\ell}{6}\frac{\ell}{2} - \frac{w}{2}\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{3}\right)^2$$

$$= \frac{5}{72} w \ell^2$$